ملخص المتتاليـات العدديـــة ذالرقبة

I- تعاريف وخاصيات

1) المتتالية العددية هي تطبيق من I جزء من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$.
صورة عنصر n من I تكتب u_n (أو , v_n ...)

2) • المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ مكبورة إذا وجد عدد حقيقي M بحيث $u_n \leq M$ لكل $n \geq n_0$.
• المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ مصغورة إذا وجد عدد حقيقي m بحيث $m \leq u_n$ لكل $n \geq n_0$.

3) • المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة إذا كانت مصغورة ومكبورة أي يوجد عددان حقيقيان m و M بحيث :
$m \leq u_n \leq M$ لكل $n \geq n_0$.
• $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة يكافئ يوجد عنصر a من $\mathbb{R}^+$ بحيث $|u_n| \leq a$ لكل $n \geq n_0$.

4) • المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تزايدية إذا كان $u_{n+1} \geq u_n$ لكل $n \geq n_0$.
• المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تزايدية قطعا إذا كان $u_{n+1} \succ u_n$ لكل $n \geq n_0$.

5) • المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تناقصية إذا كان $u_{n+1} \leq u_n$ لكل $n \geq n_0$.
• المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تناقصية قطعا إذا كان $u_{n+1} \prec u_n$ لكل $n \geq n_0$.
• المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ رتيبة إذا كانت تزايدية أو تناقصية.

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريف	$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية إذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث $u_{n+1} = u_n + r$ لكل $n \geq n_0$. (العدد r يسمى أساس المتتالية).	$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية إذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث $u_{n+1} = qu_n$ لكل $n \geq n_0$ (العدد q يسمى أساس المتتالية).
خاصية مميزة	$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية يكافئ $u_n = \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$ لكل $n \geq n_0+1$	$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية يكافئ $u_n^2 = u_{n-1}.u_{n+1}$ لكل $n \geq n_0+1$
الحد العام	إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فإن $u_n = u_k + (n-k)r$ لكل $n \geq k \geq n_0$.	إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فإن $u_n = u_k.q^{n-k}$ لكل $n \geq k \geq n_0$.
مجموع حدود متتابعة	نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + ...u_{n-1}$. $S_n = \frac{n-p}{2}(u_p + u_n)$	نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + ...u_{n-1}$ $S_n = u_p \frac{1-q^{n-p}}{1-q}$

II- نهاية متتالية

أمثلة اعتيادية

- المتتاليات التالية تؤول إلى $+\infty$:

$$(a \succ 1)(a^n) \;,\;, \sqrt{n} \quad (n^2) \;,\; (n)$$

- المتتاليات التالية تؤول إلى **0** :

$$(|a| \prec 1)(ka^n) \;,\; \left(\frac{k}{n^2}\right) \;,\; \left(\frac{k}{n}\right)$$

خاصيات

- إذا كان $\lim(u_n) = +\infty$ فإن $\lim(-u_n) = -\infty$
- $\lim(u_n) = l$ تكافئ $\lim(u_n - l) = 0$
- $\lim(u_n) = l$ تكافئ $\lim|u_n - l| = 0$

III- التقارب والترتيب

1) مصاديق تقارب متتالية

- (u_n) و (v_n) متتاليتان و l عدد حقيقي بحيث $|u_n - l| \leq v_n$ لكل $n \geq N$

  إذا كان $\lim v_n = 0$ فإن $\lim u_n = l$

- (u_n) و (v_n) متتاليتان بحيث $v_n \leq u_n$ لكل $n \geq N$

  إذا كان $\lim(v_n) = +\infty$ فإن $\lim(u_n) = +\infty$

  إذا كان $\lim(u_n) = -\infty$ فإن $\lim(v_n) = -\infty$

- (u_n) و (v_n) و (w_n) متتاليات بحيث $w_n \leq u_n \leq v_n$ لكل $n \geq N$

  إذا كان $\lim(v_n) = \lim(w_n) = l$ فإن $\lim(u_n) = l$

إذا كان $u_n \leq v_n$ لكل $n \geq N$ وكانت المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتين فإن $\lim(u_n) \leq \lim(v_n)$

2) خاصية

- كل متتالية تزايدية ومكبورة هي متتالية متقاربة.--- كل متتالية تناقصية ومصغورة هي متتالية متقاربة.

IV- العمليات على النهايات

(u_n) و (v_n) متتاليتان متقاربتان و α عدد حقيقي.

إذا كان $\lim(u_n) = l$ و $\lim(v_n) = l'$

فإن $\lim(u_n + v_n) = l + l'$; $\lim(ku_n) = kl$; $\lim(u_n v_n) = ll'$

إذا كان $\lim(u_n) = l$ و $\lim(v_n) = l'$ بحيث $l' \neq 0$

فإن $\lim\left(\frac{1}{v_n}\right)=\frac{1}{l'}$; $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)=\frac{l}{l'}$

$\lim(u_n)$	$\lim(v_n)$	$\lim(u_n+v_n)$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**شكل غير محدد**

$\lim(u_n)$	$\lim(v_n)$	$\lim(u_n \times v_n)$
$l \succ 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l \succ 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l \prec 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l \prec 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0	$+\infty$	**شكل غير محدد**
0	$-\infty$	**شكل غير محدد**

$\lim(u_n)=+\infty$	$\lim\left(\frac{1}{u_n}\right)=0$
$\lim(u_n)=-\infty$	$\lim\left(\frac{1}{u_n}\right)=0$
$\lim(u_n)=0$	$\lim\frac{1}{\lvert u_n\rvert}=+\infty$